PART4　ベクトルの終点の存在範囲

例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\dfrac{1}{2}$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

Point Pickup

練習

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$　　　(2)　$\alpha+\beta \leqq 2$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$

第13講　PART4 確認問題

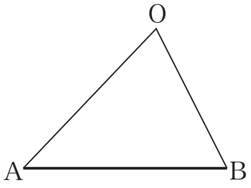
△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。

実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P はそれぞれどのような図形を描くか。

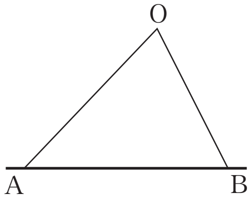
下の①～⑥のうちから選べ。

1　$2\alpha+\beta=1$　［ア］

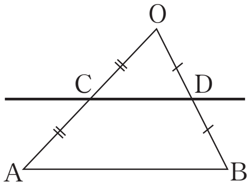
①　線分 AB



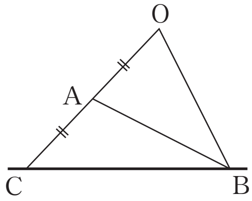
②　直線 AB



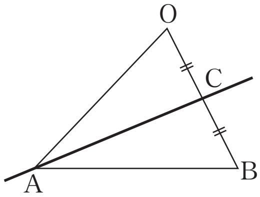
③　直線 CD



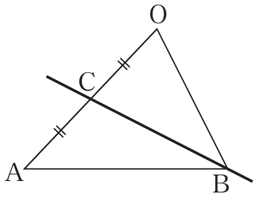
④　直線 CB



⑤　直線 AC

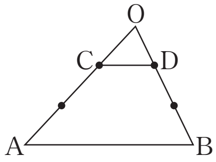


⑥　直線 BC

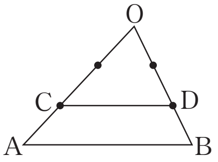


2 $\alpha+\beta \leqq \frac{2}{3}$, $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ 　 イ

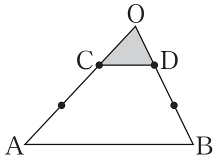
① 線分 CD



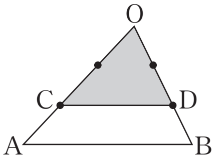
② 線分 CD



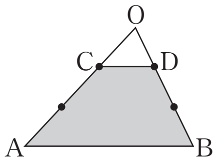
③ △OCD の周および内部



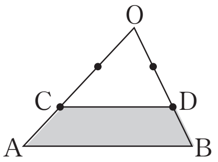
④ △OCDの周および内部



⑤ 四角形 CABD の周および内部



⑥ 四角形 CABD の周および内部



【MEMO】

PART4　ベクトルの終点の存在範囲

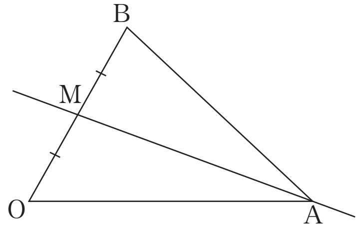
例題

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\alpha+2\beta=1$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq\dfrac{1}{2}$，$\alpha\geqq0$，$\beta\geqq0$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\beta\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

よって，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とすると，点 P の存在範囲は直線 AM である。



(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$

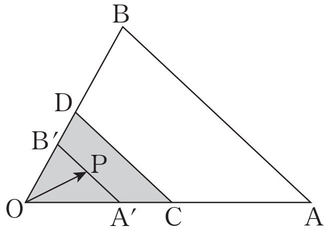
$k=0$ のとき

$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$\alpha+\beta=k$ より　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$



ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq0,\ \beta'\geqq0$$

であるから，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とする点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $0<k\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲で変化させると，線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

練習

△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ とする。実数 α，β が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

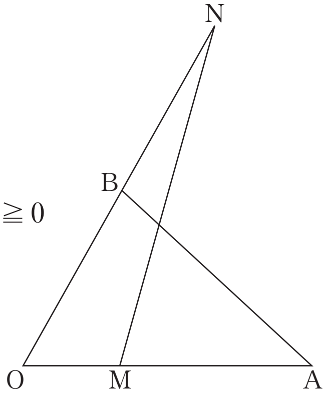
(1)　$3\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$　　(2)　$\alpha+\beta\leqq 2$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(1)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=3\alpha\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)+\dfrac{1}{2}\beta\left(2\overrightarrow{OB}\right)$

よって，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{ON}$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=3\alpha\cdot\overrightarrow{OM}+\frac{1}{2}\beta\cdot\overrightarrow{ON},\ 3\alpha+\frac{1}{2}\beta=1,\ 3\alpha\geqq 0,\ \frac{1}{2}\beta\geqq 0$$

したがって，点 P の存在範囲は線分 MN



(2)　$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq 2$

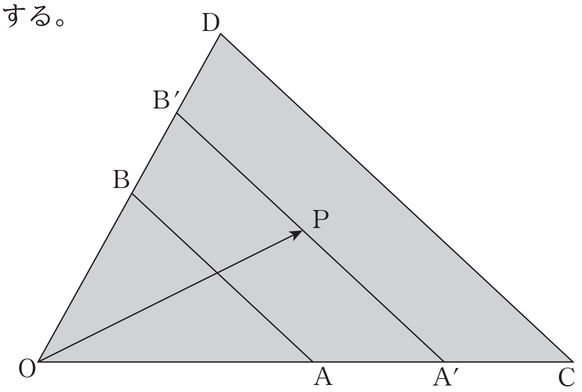
$k=0$ のとき

$\alpha=\beta=0$ であり，点 P は点 O に一致する。

$0<k\leqq 2$ のとき

$\alpha+\beta=k$ より　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{OB})$$



ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=\alpha'(k\overrightarrow{OA})+\beta'(k\overrightarrow{OB}),\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq 0,\ \beta'\geqq 0$$

であるから，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ とする点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とし，k を $0<k\leqq 2$ の範囲で変化させると，

線分 A′B′ は，点 O を除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部

第13講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥

[解説]

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$

$$=2\alpha\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+\beta\overrightarrow{OB} \quad \text{[A]}$$

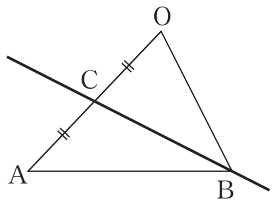
[A]　条件が $2\alpha+\beta=1$ だから，係数が 2α と β になるようにする。

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ とすると，

$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}=2\alpha\overrightarrow{OC}+\beta\overrightarrow{OB}\\ 2\alpha+\beta=1\end{cases} \quad \text{[B]}$$

[B]　$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$P(\vec{p})$ のとき，点 P が直線 AB 上にある
$\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

これを満たす点 P の存在範囲は，**直線 BC** である。



2 [正解] イ：④

[解説]

$\alpha+\beta=k$ とおくと，$0\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}$

$k=0$ のとき，

$\alpha=\beta=0$ であり，点Pは点Oに一致する。

$0<k\leqq\dfrac{2}{3}$ のとき，

$\alpha+\beta=k$ より，$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$ [C]

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

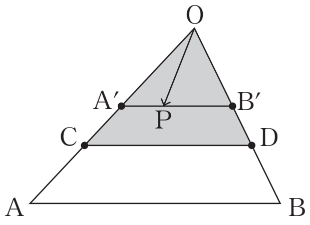
ここで，$\dfrac{\alpha}{k}=\alpha'$，$\dfrac{\beta}{k}=\beta'$ とおくと，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\beta'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ \alpha'+\beta'=1,\ \alpha'\geqq0,\ \beta'\geqq0\end{cases}$$ [D]

より，$k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ である点 A′，B′ をとると，点Pの存在範囲は，辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $0<k\leqq\dfrac{2}{3}$ の範囲で変化させると，線分 A′B′ は，点Oを除く △OCD の周および内部を平行に動く。

以上より，点Pの存在範囲は，**△OCD の周および内部**である。



[C]　右辺を1にするため，両辺を k で割る。

[D]　$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{P}(\vec{p})$ のとき，
点Pが線分 AB 上にある
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$
点Pが △OAB の周および内部にある
$\Longleftrightarrow \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$
$s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$